ตัวอย่าง Proof by contradiction

There are infinitely many primes.

Euclid : "จน. เฉพาะมีไม่จำกัด"

Thm: มีจน.เฉพาะไม่จำกัด

Proof: จะพิสูจน์ by contradiction. สมมติว่า จำนวนเฉพาะมีจำกัด
สมมติต่อ ให้ รายการ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมด ซึ่งมี n ตัว
พิจารณา

$$Q = (\underline{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n}) + 1$$

มี 2 กรณีที่เป็นไปได้

สามารถเป็นโดยไม่ต้องแยกเคสได้

Case 1: Q เป็น จน. เฉพาะ เนื่องจาก $Q > p_i$ สำหรับทุก i
ดังนั้น Q จะไม่เท่ากับ จน. ใดเลยในรายการ ดังนั้น มี จน.เฉพาะมากกว่า n ตัว $\Rightarrow$ contradiction

Case 2: Q ไม่ใช่ จน.เฉพาะ ดังนั้น Q มีตัวประกอบเป็น จน.เฉพาะบางตัว
สมมติว่าเป็น R, เนื่องจาก p_i ทุกๆ ไม่มีใครหาร Q ลงตัว
หมายความว่า $R \neq p_i$ สำหรับ i ทุกๆ $\Rightarrow$ มี จน.เฉพาะ $> n$ ตัว
$\Rightarrow$ contradiction

ดังนั้น ไม่ว่าจะเป็นกรณีใด เราจะได้ ข้อขัดแย้ง
สรุปว่า จำนวนเฉพาะมีไม่จำกัด ตามต้องการ □

"Proof by ก่อสร้าง construction"

Thm มีจน. อตรรกยะ x และ y ที่ x^y เป็น จน.ตรรกยะ

Proof: พิจารณา กรณีที่ $x = \sqrt{2}$ และ $y = \sqrt{2}$ มี 2 กรณีที่เป็นไปได้

บอกไม่ได้ว่าเป็นกรณีไหน

Case 1: x^y เป็น จน. ตรรกยะ ในกรณีนี้ thm เป็นจริง

Case 2: x^y เป็น จน. อตรรกยะ พิจารณา $z = \sqrt{2}$

จน.ตรรกยะ

$$(x^y)^z = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

จะได้ว่า มี จน. อตรรกยะ ตามเงื่อนไข thm เช่นเดียวกัน

→ เนื่องจาก thm เป็นจริง ทั้งสองกรณีที่เป็นไปได้ ดังนั้น thm เป็นจริง □